Aufgaben zu quadratischen Funktionen mit Parameter (1)

Aufgabe 1

Gegeben ist die reelle Funktionenschar: $f_a : \mapsto ax^2 - 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.1 Geben Sie die Form der Graphen von f_a in Anhängigkeit von a an.
Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen.

1.2 Bestimmen Sie den Scheitelpunkt von f_a in Abhängigkeit von a.

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Anhängigkeit von a. Für welche Werte von a gibt es zwei verschiedene Nullstellen, genau eine Nullstelle oder keine Nullstelle?

1.4 Zeigen Sie, dass kein Graph der Funktion f_a durch den Nullpunkt verläuft.

1.5 Setzen Sie a = 2 und bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von 1.2 und 1.3 die Nullstellen und den Scheitel von f_2.

1.6 Bestimmen Sie den Bereich, für den die Funktionswerte von f_2 den Wert 8 nicht übersteigen.

Aufgabe 2

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ haben folgende reellen Parabelscharen keine Nullstellen: $f_a : x \mapsto$ ....

a) $ax^2 + 2x + 1$	b) $-x^2 + x + a - 1$	c) $2x^2 + ax + 2$	d) $ax^2 - ax + 2a$
e) $-x^2 + ax - a$	f) $3x^2 - ax - a - 1$	g) $-2x^2 - (a+1)x + a - 5$	h) $ax^2 - ax + a - 3$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Parabelschar f_t: $x \mapsto (t^2-1)x^2 + (2-2t^2)x + 2t$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$
Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 4

Gegeben ist die reelle Parabelschar $f_k : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 - kx + k - 2$; $k \in \mathbb{R}$

4.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit von k.

4.2 Bestimmen Sie die Anzahl und die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse in Abhängigkeit von k.

4.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der auf allen Parabeln der Schar liegt. (!)

4.4 Zeichnen Sie die Parabeln für $k \in \{-3; -1; 0; 1; 2\}$ und $-6 \le x \le 8$.

Aufgabe 5

Gegeben sei die reelle Scharfunktion $f_t : x \mapsto 2x^2 + tx + 2$; $t \in \mathbb{R}$.

5.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

5.2 Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt f_t genau eine Nullstelle?

5.3 Geben Sie für t = 5 die Linearfaktorzerlegung von f_t an.

5.4 Bestimmen Sie t so, dass P(1; 2) auf dem Graphen liegt.

5.5 Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $G_{f\,2}$ und dem Graphen der Funktion h: $x \mapsto 0{,}5x + 1{,}5$.

5.6 Gegeben sei jetzt die reelle Funktion g mit $g(x) = -3x + r$; $r \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie rechnerisch, für welches r $G_{f\,5}$ und G_g genau einen gemeinsamen Punkt besitzen und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an. (Ergebnis: r = −6)
Zeichnen Sie $G_{f\,5}$ und G_g für r = −6 in ein kartesisches Koordinatensystem ein.